Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί από διαφορετική οπτική γωνία

Θεμ. Ενότητα: Διδασκαλία των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Φώτιος Δ. Οικονόμου MSc
Μαθηματικός - Φυσικός
Κ. Μακρυνού - 30015 Μακρυνεία - Δήμος Αγρινίου
Τηλ.: 6977906792
Email: pheconom@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δίνονται συνήθως σε σχέση με κάποιο τρίγωνο ή τον τριγωνομετρικό κύκλο. Στο άρθρο αυτό δίνεται μια διαφορετική οπτική γωνία γι' αυτούς, συσχετίζοντάς τους με ηλεκτρομαγνητικά κύματα και ειδικότερα με ένα κύμα που έχει την μορφή της κανονικής κατανομής. Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ανάλυσης κατά Fourier ενός κύματος, σε ημιτονοειδή κύματα, κάνοντας μια προσεγγιστική ολοκλήρωση. Αν και χρησιμοποιούμε ελάχιστους όρους αυτής της ολοκλήρωσης έχουμε εκπληκτική προσέγγιση του αρχικού κύματος ως επαλληλία (άθροισμα) ημιτονοειδών συναρτήσεων, αναδεικνύοντας την σημασία των τελευταίων.

ABSTRACT

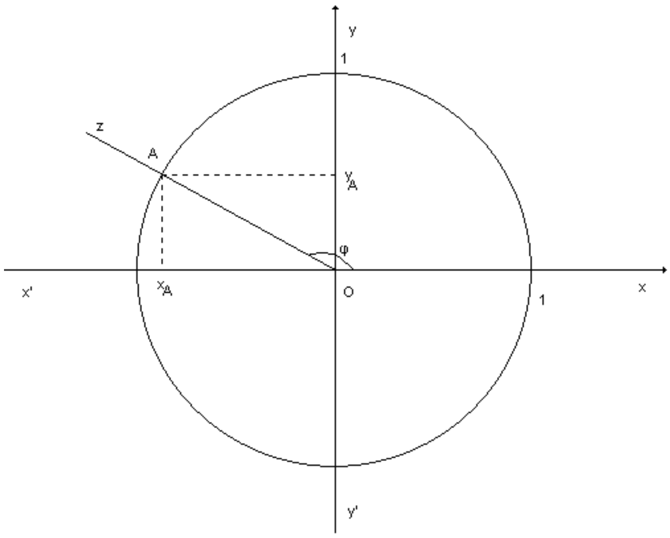
In this paper we consider the Fourier analysis of the probability density function (p.d.f.) of the normal distribution. It turns out that this p.d.f., regarded as a wave, can be written as a sum with a few sinusoidal terms, that is, a superposition of plane waves, with sufficient accuracy. So, there is a different perspective of trigonometric functions as components of a well behaved function.

1. Εισαγωγή

Είναι κοινός τόπος μεταξύ των ειδικών στα Μαθηματικά, στη Φυσική, στις θετικές επιστήμες γενικότερα, ότι τα μαθηματικά αποτελούν οικοδόμημα αποτελούμενο από πολλά δομικά στοιχεία, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με πολλαπλούς συχνά τρόπους. Αυτό το νοητικό οικοδόμημα καλείται να εκπονήσει κάθε εκπαιδευόμενος από τα πρώτα χρόνια της ζωής του. Είναι φανερό [1,2] ότι η αντοχή και η ποιότητα της δημιουργίας κάθε μαθητή, βασίζεται, πέραν των άλλων, και στην εμπέδωση της πληθώρας των αλληλεξαρτήσεων μεταξύ των διαφόρων εννοιών. Αυτός ο συσχετισμός εννοιών δημιουργείται και από την πληθώρα των αναπαραστάσεων με τις οποίες παρουσιάζεται (ή επανα-ανακαλύπτεται από τον ίδιο) κάθε μια από αυτές. Παρακάτω θα δούμε μια «διαφορετική» αναπαράσταση των τριγωνομετρικών αριθμών.

Όπως είναι γνωστό από το γυμνάσιο, τα $ημθ, συνθ, εφθ$ ορίζονται αρχικά για οξεία γωνία $θ$ ορθογωνίου τριγώνου [3]. Είναι δυνατό να οριστούν και για οποιαδήποτε άλλη γωνία όπως ακολούθως [4].

Έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο με αρχή O, τον άξονα $x'x$ των τετμημένων, τον άξονα $y'y$ των τεταγμένων και ο κύκλος $(O, 1)$ με κέντρο το O και ακτίνα την μονάδα (βλ. σχήμα 1). Έστω επίσης ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας $φ$ όπου $φ \geq 0°$.



Σχήμα 1

Περιστρέφουμε τον θετικό ημιάξονα Ox κατά την γωνία $φ$, αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού και περί την αρχή O των συντεταγμένων, οπότε συμπίπτει με την ημιευθεία Oz. Αν καλέσουμε A το σημείο τομής της ημιευθείας Oz και του κύκλου $(O, 1)$ και το A έχει συντεταγμένες (x_A, y_A), ορίζουμε

$$\eta\mu\varphi = y_A,\ \ \sigma\upsilon\nu\varphi = x_A$$

και κατά τα γνωστά, αν $\sigma\upsilon\nu\varphi \neq 0$,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}.$$

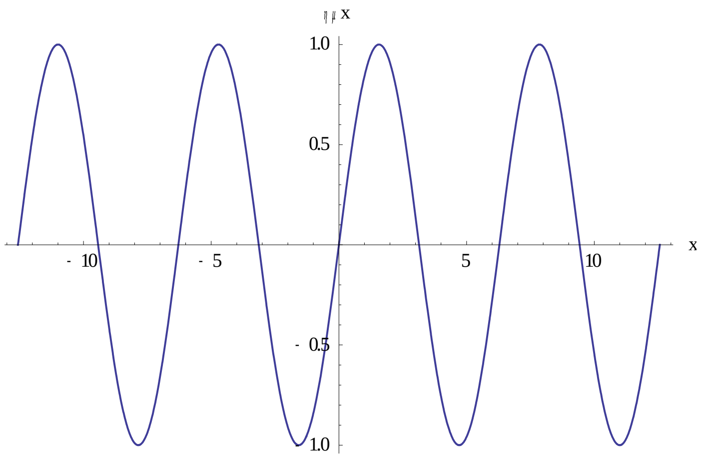
Στην περίπτωση που η περιστροφή γίνει κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού μπορούμε να μιλάμε για αρνητική γωνία $-\varphi$ και αντίστοιχα $\eta\mu(-\varphi) = y_B$, $\sigma\upsilon\nu(-\varphi) = x_B$ και $\varepsilon\varphi(-\varphi) = \eta\mu(-\varphi)/\sigma\upsilon\nu(-\varphi)$ (για $\sigma\upsilon\nu(-\varphi) \neq 0$), με B σημείο οριζόμενο όμοια με το A.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα μέτρησης των γωνιών τα ακτίνια αντί για τις μοίρες. Συγκεκριμένα λέμε ότι η γωνία $z\hat{O}x$ μεγέθους φ μοιρών (θετική μηδέν ή αρνητική) έχει μέγεθος x ακτίνια, όπου

$$x = 2\pi\frac{\varphi}{360}.$$

2. Το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier

Στο ακόλουθο σχήμα 2 βλέπουμε την γραφική παράσταση του $\eta\mu x$ για $-4\pi \leq x \leq 4\pi$.



Σχήμα 2 – Η γραφική παράσταση του ημx

Εύκολα βλέπουμε ότι αυτή η μορφή επαναλαμβάνεται για όλα τα πραγματικά x.

Αν θέλουμε να χαρακτηρίσουμε αυτή την μορφή με όρους της καθημερινότητας αναμφίβολα μια λέξη έρχεται στο μυαλό μας: **κύμα**. Το ημίτονο που το ορίσαμε αρχικά με την βοήθεια τριγώνων είναι ένα κύμα, ακριβέστερα ένα «επίπεδο κύμα» (μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 από την οποία μπορούμε να μετράμε τον χρόνο δηλ. $t_0 = 0$). Συνειρμικά τώρα έρχονται στο νου και άλλα κύματα, όπως τα ραδιοκύματα τα οποία μεταφέρουν το τηλεοπτικό ή το ραδιοφωνικό σήμα, τα μικροκύματα με τη βοήθεια των οποίων ψήνουμε το φαγητό μας, το ορατό φώς στο οποίο οφείλουμε την ύπαρξή μας, η υπεριώδης ακτινοβολία εξαιτίας της οποίας μαυρίζουμε το καλοκαίρι στην παραλία, οι ακτίνες Χ που χρησιμοποιούνται στην ιατρική, οι ακτίνες γ, με μια λέξη τα **ηλεκτρομαγνητικά κύματα**. Έχει άραγε σχέση το ημίτονο με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα; Η απάντηση είναι **ναι**. Το ημίτονο όπως και το συνημίτονο, δεδομένου ότι αποτελούν δύο όψεις της ίδιας έννοιας, αφού από το ένα μπορούμε να πάμε στο άλλο με οριζόντια μετακίνηση του συστήματος συντεταγμένων, έχουν μάλιστα δεσπόζουσα θέση στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. **Ο λόγος είναι ότι κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορεί να «αναλυθεί» σε κύματα της μορφής του Σχ. 2 (ημιτονοειδή κύματα).** Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα γράφεται, δηλαδή, ως επαλληλία ημιτονοειδών κυμάτων. Με τον όρο επαλληλία δύο ή περισσότερων κυμάτων που κινούνται στο ίδιο μέσο, εννοούμε το κύμα που αναφέρεται στην ολική μετατόπιση του μέσου. Για τα μονοδιάστατα κύματα παίρνουμε, συγκεκριμένα, το αλγεβρικό άθροισμα των μετατοπίσεων σε συγκεκριμένο σημείο.

Η ανάλυση αυτή υλοποιείται με το «Ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier» που ακολουθεί [5]:

Αν μια συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, είναι συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα και είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, *δηλαδή υπάρχει το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = Q,$$

τότε, αν,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(iux)\, dx$$

έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\exp(-iux)\,du$$

όπου $\exp(ix) \equiv e^{ix} = συνx + iημx,\, e \approx 2.72.$

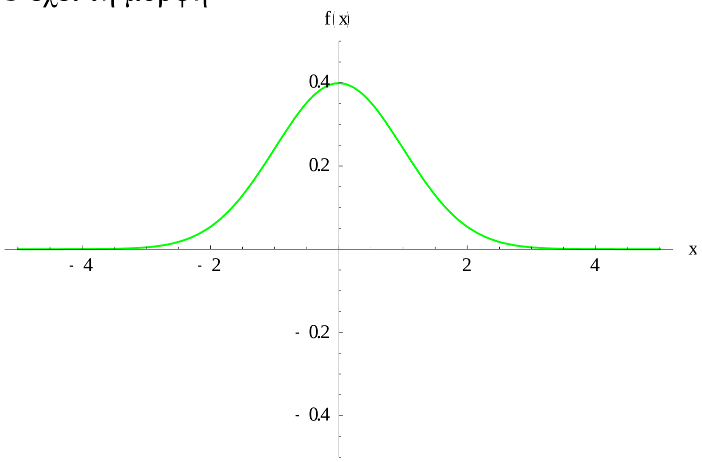
Συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε το παρακάτω απλό παράδειγμα.

3. Η Γκαουσιανή καμπύλη

Ας θεωρήσουμε ένα κύμα που την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει την μορφή της λεγόμενης Γκαουσιανής καμπύλης [6]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

η γραφική παράσταση της οποίας έχει την μορφή καμπάνας. Π.χ. για $-5 \leq x \leq 5$ έχει τη μορφή



Σχήμα 3 – Η γραφική παράσταση της f

Η συνάρτηση αυτή γνωστή και ως «κανονική κατανομή», είναι ιδιαίτερα σημαντική. Η μεταβλητή x της κανονικής κατανομής, γενικότερα, συσχετίζεται με χαρακτηριστικό μέγεθος συστήματος προς μελέτη. Συγκεκριμένα το x θα μπορούσε να συνδέεται με τους βαθμούς ενός μαθητή, το λάθος κατά την μέτρηση μιας ποσότητας, την θέση κβαντομηχανικού συστήματος, όπως ο αρμονικός ταλαντωτής, που χρησιμοποιείται για την μαθηματική περιγραφή του φωτός [7]. Αν $x \in \mathbb{R}$

όπως στο σχήμα και $\Delta x = 2\varepsilon$ το μήκος ενός μικρού διαστήματος $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ η ποσότητα $f(x_0)\Delta x$ εκφράζει την πιθανότητα ή διαφορετικά «πόσο πιθανό είναι» το x να ανήκει στο μικρό αυτό διάστημα. Η σπουδαιότητα της συνάρτησης αυτής, πέρα από την «άμεση» σχέση της με φυσικά συστήματα, αντλείται και από το γεγονός ότι, αντικείμενα προς μελέτη που περιγράφονται από κάποιο πιθανοθεωρητικό μοντέλο, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, ακολουθούν κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή (κεντρικό οριακό θεώρημα) [6].

Έστω ότι θέλουμε να αναλύσουμε αυτή την συνάρτηση σαν μια επαλληλία (άθροισμα) ημιτονοειδών συναρτήσεων προκειμένου να αναδειχθεί μια άλλη όψη αυτών, κάτι που θα μπορούσαμε να κάνουμε με οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν. Έχουμε, συγκεκριμένα, από το «ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier»,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iux)\, h(u) du$$

ή ειδικότερα

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sigma\upsilon\nu(ux)\, h(u) du$$

όπου

$$h(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Είναι αξιοσημείωτο όμως, ότι έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση της f υπολογίζοντας προσεγγιστικά το τελευταίο ολοκλήρωμα, κρατώντας μάλιστα λίγους προσθετικούς όρους. Πράγματι, θεωρούμε διαμέριση του $[0, +\infty)$ κρατώντας τα πέντε πρώτα υποδιαστήματα, δεδομένου ότι στα υπόλοιπα, λόγω της εκθετικής μείωσης της $h(u)$, η συνεισφορά θα είναι αμελητέα. Συγκεκριμένα, έστω $du \approx \Delta u = \frac{2}{5} = 0.4$ και αθροίζουμε την ολοκληρωτέα για $u = u_j$ με

$$u_j = \frac{\Delta u}{2} + j\Delta u = 0.2 + j0.4,$$

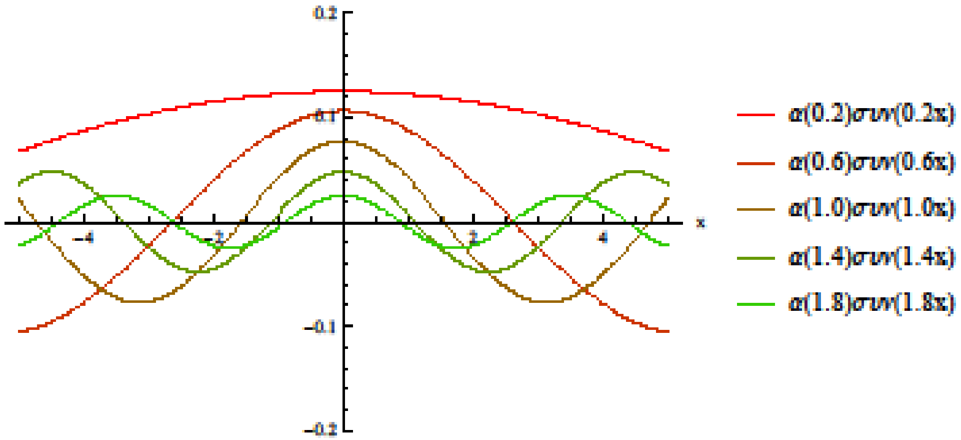
το μέσο του j διαστήματος $\left(u_j - \frac{\Delta u}{2}, u_j + \frac{\Delta u}{2}\right)$, $j = 0,1,2,3,4$, πλάτους Δu. Έτσι προκύπτει η συνάρτηση $f_\pi(x)$ όπου

$$f_\pi(x) = \alpha(0.2)\sigma\upsilon\nu(0.2x) + \alpha(0.6)\sigma\upsilon\nu(0.6x) + \alpha(1.0)\sigma\upsilon\nu(1.0x) + \alpha(1.4)\sigma\upsilon\nu(1.4x) + \alpha(1.8)\sigma\upsilon\nu(1.8x)$$

η οποία είναι πράγματι μια επαλληλία ημιτονοειδών συναρτήσεων, με

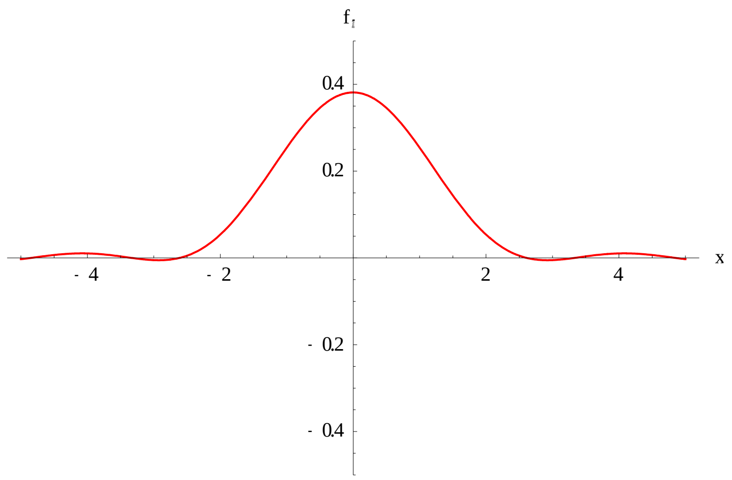
$$\alpha(u) = \frac{\Delta u}{\pi} h(u) = \frac{2}{5\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

οι συντελεστές με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι ημιτονοειδής συναρτήσεις. Οι προσθετικοί όροι που εμφανίζονται στην παραπάνω έχουν τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις



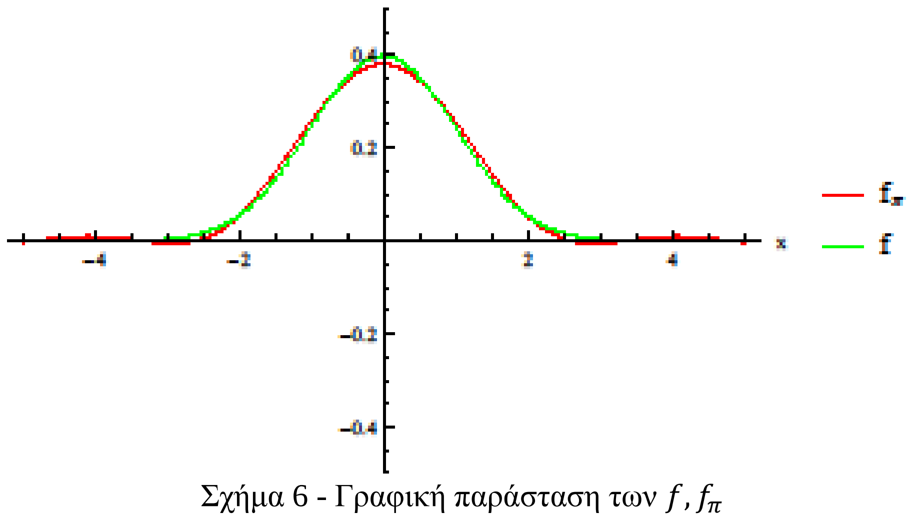
Σχήμα 4 - Γραφική παράσταση των όρων της f_π

Η $f_\pi(x)$ που αποτελεί το άθροισμα των παραπάνω έχει την μορφή



Σχήμα 5 - Γραφική παράσταση της $f_\pi(x)$

η οποία προσεγγίζει εκπληκτικά την f (παρά τους λίγους όρους στο άθροισμα) όπως φαίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα (6) όπου απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των f, f_π στο ίδιο σύστημα αξόνων σε πράσινο και κόκκινο αντίστοιχα. Έχουμε, δηλαδή, αναλύσει το αρχικό κύμα σε επαλληλία ημιτονοειδών συναρτήσεων αναδεικνύοντας μια διαφορετική οπτική γωνία των τελευταίων.



Σχήμα 6 - Γραφική παράσταση των f, f_π

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ το φίλο και συνάδελφο Δρ. Τζούμα Μιχάλη για την πολύτιμη (και πολύπλευρη) συμβολή του.

Βιβλιογραφία

1. Duval, R. (2006). "A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics". Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.
2. Dreher A., Kuntze S. & Lerman S. "Why Use Multiple Representations in the Mathematics Classroom? Views of English and German Preservice Teachers". Int J of Sci and Math Educ (2016) 14 (Suppl 2):S363–S382 DOI 10.1007/s10763-015-9633-6.
3. Π.Βλάμος, Π.Δρούτσας, Γ. Πρέσβης, Κ. Ρεκούμης, "Μαθηματικά Β' Γυμνασίου", ΙΤΥΕ Διόφαντος, 2014.
4. Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ.Πολύζος, Α. Σβέρκος, "Αλγεβρα Α' Λυκείου", ΟΕΔΒ, Αθήνα 1994.
5. M. R. Spiegel, Schaum's outline series, "Ανώτερα Μαθηματικά", ΕΣΠΙ Αθήνα 1982.
6. M. R. Spiegel, Schaum's outline series, "Πιθανότητες και Στατιστική", ΕΣΠΙ Αθήνα 1977.
7. Y.Peleg, R. Pnini, E. Zaarur, Schaum's outline series, "Schaum's outline of theory and problems of Quantum Mechanics", McGraw-Hill 1998.