ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (3η και 4η ώρα)

Μιχάλης Τζούμας

Σχ. Συμβ. Μαθηματικών

Σχεδιο Μαθήματος, δυο διδακτικές ώρες

στις Απόλυτες Τιμές – Α΄ Λυκείου

Στόχοι

- Να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν τις στοιχειώδεις ιδιότητές των απολύτων τιμών, βάσει του ορισμού τους.
- Να αναγνωρίζουν και να επιλύουν απλές εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές.
- Να αναγνωρίζουν και να αποδεικνύουν άλλες ιδιότητες των απολύτων τιμών.
- Να χρησιμοποιούν αυτές στο να επιλύουν απλές εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές.

Προαπαιτούμενες γνώσεις – έλεγχος

- Τον ορισμό των απολύτων τιμών.
- Να επιλύουν απλές εξισώσεις και ανισώσεις.
- Τις ταυτότητες $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ και $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Ιδιότητες που προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

- ⋆ $|x| \geq 0$, γιατί; Πότε ισχύει το ίσον; το μεγαλύτερο;
  Παράδειγμα: Τι σημαίνει για τους x και y α) η ισότητα $|x| + |y| = 0$, β) η ανισότητα $|x| + |y| > 0$.
- ⋆ $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$, γιατί; Πότε ισχύει το ίσον σε κάθε περίπτωση;
- ⋆ $|x|^2 = x^2$, γιατί;
  Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 2| = 3$ (Με ύψωση στο τετράγωνο. Έχουν μάθει ότι για θετικούς a και b ισχύει, $a = b \Leftrightarrow a^m = b^m$.)

Ιδιότητες που προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό

Επίσης ισχύει:

- ⋆ Όταν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.(Γιατί;)

  Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 3$.
- ⋆ Όταν $a \neq 0$, τότε $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$.(Γιατί;)

  Παράδειγμα: α) Να λυθεί η εξίσωση $|2x - 1| = |x - 5|$.

  β)Να λυθεί η εξίσωση $|x - 1| = |x - 3|$.

Ιδιότητες που προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό

- Σε άξονα βρείτε τα σημεία που απέχουν λιγότερο από 2, από την αρχή. Εκφράστε το αυτό με μια σχέση!
- Για κάθε σημείο της περιοχής που σκιαγραφήσατε ποια σχέση ισχύει μεταξύ της απόλυτης τιμής και του 2; Εκφράστε το αυτό με μια σχέση!
- Δηλαδή $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Γενικά,

$$\theta > 0, \ |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta.$$

Πράγματι

- Αν $x \geq 0$, τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow 0 \leq x < \theta$.
- Αν $x < 0$, τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -x < \theta \Leftrightarrow x > -\theta$.

Αλλιώς, $|x| < \theta \Leftrightarrow |x|^2 < \theta^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

Ιδιότητες που προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό

Επίσης,

- Σε άξονα βρείτε τα σημεία που απέχουν περισσότερο από 2, από την αρχή. Εκφράστε το αυτό με μια σχέση!
- Για κάθε σημείο της περιοχής που σκιαγραφήσατε ποια σχέση ισχύει μεταξύ της απόλυτης τιμής και του 2; Εκφράστε το αυτό με μια σχέση!
- Δηλαδή $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$. (Γενικά; $|x| > \theta$)

Παράδειγμα: Να λυθούν οι ανισώσεις: $|x-1| < 2$, $|x-3| \geq 2$, $2 < |x+3| \leq 5$. Να δοθούν γεωμετρικά οι λύσεις.
Θυμηθείτε τι εκφράζει γεωμετρικά η ποσότητα: α)$|x-1|$, β)$|x-3|$, γ)$|x+3|$.

Άλλες Ιδιότητες των απολύτων τιμών.

A) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ και $|\frac{\alpha}{\beta}| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$.
Η απόδειξη διακρίνοντας τις περιπτώσεις:
1) $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, 2) $\alpha > 0$ και $\beta < 0$,
3) $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, 4) $\alpha < 0$ και $\beta < 0$.
Να μη ξεχαστεί η περίπτωση ένας από τους δυο να είναι μηδέν.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 3| = \frac{3}{|x-1|}$

Άλλες Ιδιότητες των απολύτων τιμών.

Β) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ και $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta|$.
Η απόδειξη δεν θα γίνει, αλλά θα διαπιστωθεί με παραδείγματα:
1) $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, 2) $\alpha > 0$ και $\beta < 0$,
3) $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ 4) $\alpha < 0$ και $\beta < 0$.

Πότε ισχύει το ίσον σε καθε μια περίπτωση;

Παράδειγμα: Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση
Αν $|x| \leq 2$ τότε $|x+3| \leq \dots$
Δώστε ένα παράδειγμα για το $=$ και ένα για το $<$.

Παράδειγμα: Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση
Αν $|x| \leq 3$ τότε $|x-4| \leq \dots$
Δώστε ένα παράδειγμα για το $=$ και ένα για το $<$.

Άλλες Ιδιότητες των απολύτων τιμών.

Αν το τμήμα είναι «καλό» ή έχει μερικούς «καλούς» τότε:

1) Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Αν $|x| \geq 4$ τότε $|x+3| \geq \ldots$

Δώστε ένα παράδειγμα για το $=$ και ένα για το $>$.

Παράδειγμα: Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Αν $|x| \leq 1$ τότε $|x+3| \geq \ldots$

Δώστε ένα παράδειγμα για το $=$ και ένα για το $>$.

2) Αν $\alpha = x$ και $\beta = -y$ έχουμε

$$|x-y| \leq |x|+|y| \text{ και } ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

Πότε ισχύει το ίσον σε κάθε μια περίπτωση;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ !!!!!!!!!!!!!!