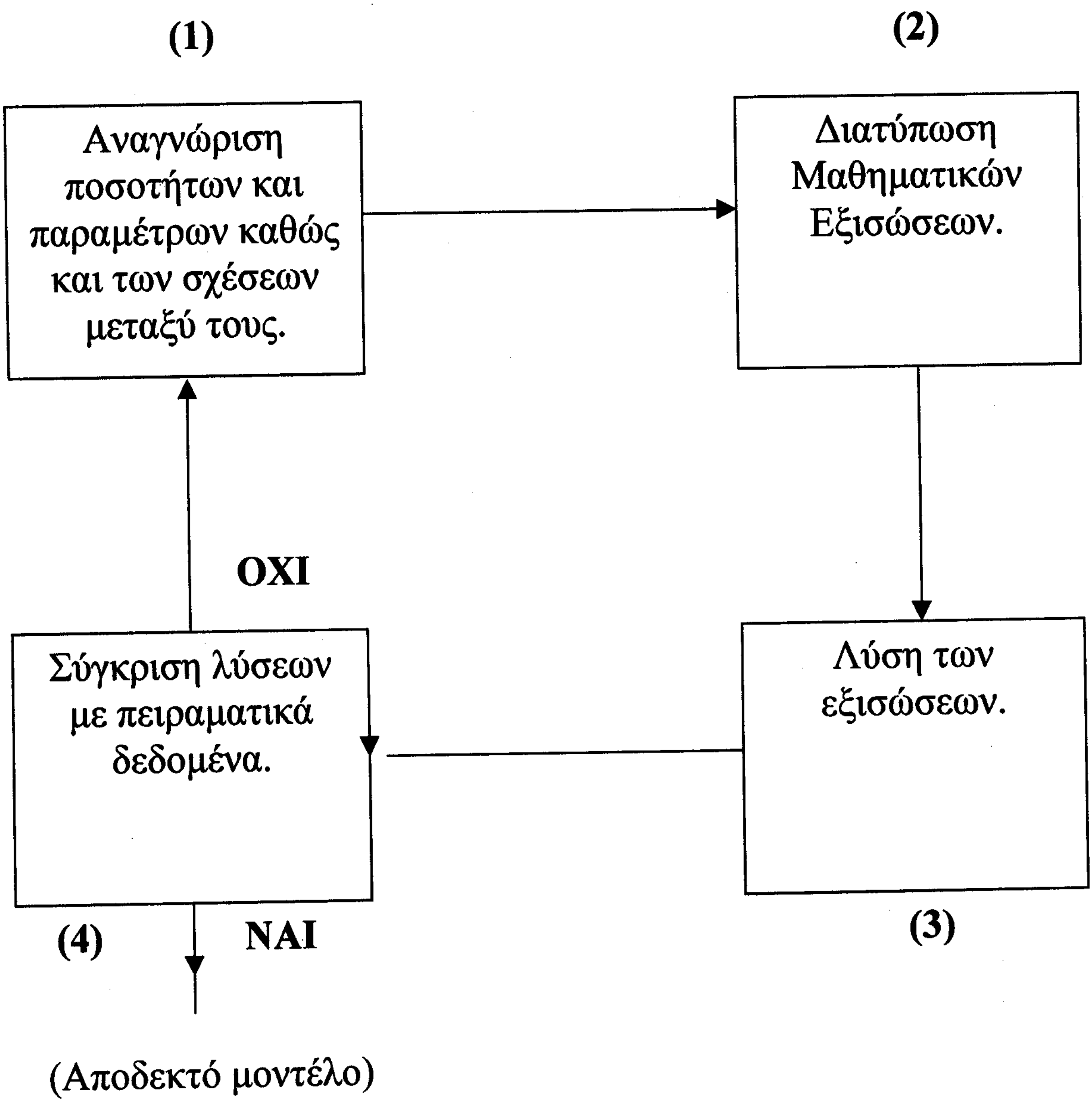

(1)
Αναγνώριση ποσοτήτων και παραμέτρων καθώς και των σχέσεων μεταξύ τους.
(2)
Διατύπωση Μαθηματικών Εξισώσεων.
(3)
Λύση των εξισώσεων.
(4)
Σύγκριση λύσεων με πειραματικά δεδομένα.
ΟΧΙ
ΝΑΙ
(Αποδεκτό μοντέλο)

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΛΕΙΣΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΛΥΣΗΣ

Έστω η εξίσωση :

$$x^3 - 3x = 2a$$

Η λύση δίνεται από τον τύπο του Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} + \sqrt[3]{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

Αν $\alpha = 0{,}01$ ο τύπος είναι σχεδόν άχρηστος

Η προσεγγιστική αντιμετώπιση είναι πολύ πιο κατατοπιστική.

Επειδή η λύση αναμένεται μικρή η ποσότητα x^3 μπορεί να αγνοηθεί.

Τότε $-3x \simeq 2a \rightarrow x = -\frac{2\alpha}{3}$

που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση .

Εξίσωση Διαφορών, Δεύτερης τάξης, Γραμμική με Σταθερούς Συντελεστές:

Μορφή: $y_{k+2}+a_1 y_{k+1}+\alpha_2 y_k = R$, $\alpha_1,\alpha_2, R\in\mathbb{R}$ ①

Αν $y_k=A$ σημ. ισορροπίας, τότε $y_{k+1}=y_{k+2}=A$

$\rightsquigarrow$ $A+\alpha_1 A+\alpha_2 A = R \rightarrow A=\dfrac{R}{1+\alpha_1+\alpha_2}$, $1+a_1+a_2\neq 0.$

Αντίστοιχη ομογενής: $y_{k+2}+\alpha_1 y_{k+1}+a_k y_k = 0$

Χαρ|κή Εξίσωση ομογενούς: $r^2+\alpha_1 r+\alpha_2=0$ ②

Ρίζες της ②: Έστω $r_1, r_2\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Γενική Λύση Ομογενούς: $y_k^{(h)}=c_1 r_1^k+c_2 r_2^k$

Γενική λύση της ①: $y_k = c_1 r_1^k+c_2 r_2^k+\dfrac{R}{1+\alpha_1+\alpha_2}$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

<u>Ισχύει:</u> Για κάθε ζεύγος αρχικών συνθηκών y_0, y_1

είναι $\lim_{k\to+\infty} y_k = A \longleftrightarrow$ αν $|r_1|<1$, $|r_2|<1$

(Το A είναι <u>ευσταθές</u> σημ. ισορροπίας)

Αν η (2) έχει ρίζες ίσες $r_1 = r_2$ τότε η γενική λύση της (1) είναι:

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 k r_1^k + A$$

Ισχύει: $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = A \longleftrightarrow$ αν $|r_1| < 1$

(Το A είναι <u>ευσταθές</u> σημ. ισορροπίας).

Αν η (2) έχει ρίζες μιγαδικές συζυγείς.

$r_1 = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, $r_2 = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)$

η γενική λύση της (1) είναι:

$$y_k = A_1 \rho^k \sigma\upsilon\nu(k\theta + B_1) + A \quad , \ A_1, B_1 \text{ σταθερές.}$$

Ισχύει: $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = A \longleftrightarrow$ αν $\rho = |r_1| = |r_2| < 1$

(Το A είναι ευσταθές σημ. ισορροπίας).

Ισχύει η επόμενη πρόταση:

Οι ρίζες r_1, r_2 της εξίσωσης $r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$ είναι πραγματικές και ισχύει $|r_1| < 1$, $|r_2| < 1$ τότε και μόνον τότε, αν

$$\alpha_1^2 - 4\alpha_2 > 0 \quad \text{και}$$

$$|\alpha_1| < 1 + \alpha_2 < 2$$

ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΜΙΑΣ ΧΩΡΑΣ

(Μοντέλο Samuelson)

Συμβολίζουμε:

T_k = εθνικό εισόδημα τη χρονική στιγμή k.

C_k = καταναλωτικές δαπάνες τη χρονική στιγμή k.

I_k = Επενδύσεις τη χρονική στιγμή k.

G_k = Κυβερνητικές Δαπάνες τη χρονική στιγμή k.

Κάνουμε τις επόμενες 4 υποθέσεις:

Υποθ. 1: Η εξίσωση του εθνικού εισοδήματος είναι:

$$T_k = C_k + I_k + G_k \qquad (1)$$

Υποθ. 2: $$C_{k+1} = \alpha T_k \quad , \ 0<\alpha<1 \qquad (2)$$

Τα χρήματα καταναλώνονται την επόμενη από την περίοδο που αποκτήθηκαν.

Υποθ. 3: $$I_{k+1} = b\,(C_{k+1} - C_k) \quad , \ b>0 \qquad (3)$$

Οι επενδύσεις είναι ανάλογες της αύξησης της κατανάλωσης.

Υποθ. 4: Υποθέτουμε ότι οι κυβερνητικές δαπάνες είναι σταθερές. Συνήθως θέτουμε $G_k = 1$.

Από την εξίσωση (1) θέτοντας $k \longrightarrow k+2$, $G_k = 1$ έχουμε:

$$T_{k+2} = C_{k+2} + I_{k+2} + 1 \qquad (4)$$

Κάνοντας χρήση των (2) και (3) προκύπτει.

$$T_{k+2} - \alpha(1+b)T_{k+1} + \alpha b T_k = 1 \qquad (5)$$

που είναι εξίσωση διαφορών γραμμική δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Εκφράζει το μοντέλο Samuelson για το εθνικό εισόδημα T_k μιας χώρας.

Γενικά υποθέτουμε ότι T_0, T_1 γνωστά.

Η εξίσωση (5) που δίνει τη δυναμική συμπεριφορά του εθνικού εισοδήματος, συνδέει το εθνικό εισόδημα μιας περιόδου με το εθνικό εισόδημα των δύο προηγούμενων περιόδων.

Αν T^* η σταθερή λύση της εξίσωσης (5) τότε $T_{k+2} = T_{k+1} = T_k = T^*$ και θα έχουμε.

$$T^* - \alpha(1+b)T^* + \alpha b T^* = 1 \longrightarrow T^* = \frac{1}{1-\alpha}$$

Βλέπουμε ότι το σημ. ισορροπίας T^* (δηλ. η σταθερή λύση) εξαρτάται μόνον από το α και υπάρχει πάντοτε αφού $0 < \alpha < 1$.

Η χαρ/κή εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$r^2 - \alpha(1+b)r + \alpha b = 0$$

που έχει τις ρίζες:

$$r_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha(1+b) + \sqrt{\alpha^2(1+b)^2 - 4\alpha b}\right]$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left[\alpha(1+b) - \sqrt{\alpha^2(1+b)^2 - 4\alpha b}\right]$$

Θα μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά της λύσης T_k ανάλογα με το είδος των ριζών της χαρ/κής εξίσωσης.

I) Οι ρίζες r_1, r_2 είναι συζυγείς μιγαδικές όταν

$$\alpha^2(1+b)^2 - 4\alpha b < 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha < \frac{4b}{(1+b)^2} \quad (\text{αφού } \alpha > 0)$$

Είναι επίσης

$$\sqrt{\alpha b} = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_2 \bar{r}_1} = |\bar{r}_1| = |\bar{r}_2| .$$

Το σημείο ισορροπίας είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές

όταν $\quad |r_1| = \sqrt{\alpha b} < 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\alpha < \frac{1}{b}$$

Αν στους άξονες των α, b θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων

$$\alpha = \frac{4b}{(1+b)^2} \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{1}{b}$$

τότε, τα σημεία του επιπέδου πού είναι κάτω και από τις δύο καμπύλες δίνουν μιγαδικές ρίζες που οδηγούν σε ευσταθή λύση.

II) Η διακρίνουσα $a^2(1+b)^2-4ab>0$

$$\Leftrightarrow$$

$$a>\frac{4b}{(1+b)^2}$$

Τότε $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ και $r_1 \neq r_2$.

Η λύση που προκύπτει είναι ευσταθής

$$\Leftrightarrow$$

$$|r_1|<1 \text{ και } |r_2|<1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|\alpha(1+b)| < 1+\alpha b < 2$$

Είναι $0<\alpha<1$, $b>0 \Rightarrow$

$$|\alpha(1+b)| = \alpha(1+b) = \alpha+\alpha b < 1+\alpha b$$

Δηλ. η αριστερή ανισότητα ισχύει πάντοτε.

Από $1+\alpha b<2 \Rightarrow \alpha b<1 \Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{b}$.

Άρα τα σημεία του επιπέδου που είναι κάτω από την καμπύλη $\alpha=\frac{1}{b}$ και επάνω από την καμπύλη $\alpha=\frac{4b}{(1+b)^2}$, δίνουν στην εξίσωση πραγματικές ρίζες που αντιστοιχούν σε ευσταθή λύση.

III) Αν $a^2(1+b)^2-4ab=0$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha=\frac{4b}{(1+b)^2} \qquad (6)$$

η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

$$r_1 = r_2 = \frac{\alpha(1+b)}{2}$$

Η γενική λύση τότε είναι:

$$T_k = (c_1 + c_2 k)\left[\frac{\alpha(1+b)}{2}\right]^k + \frac{1}{1-\alpha}$$

Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\alpha(1+b)}{2} < 1 \qquad (7)$$

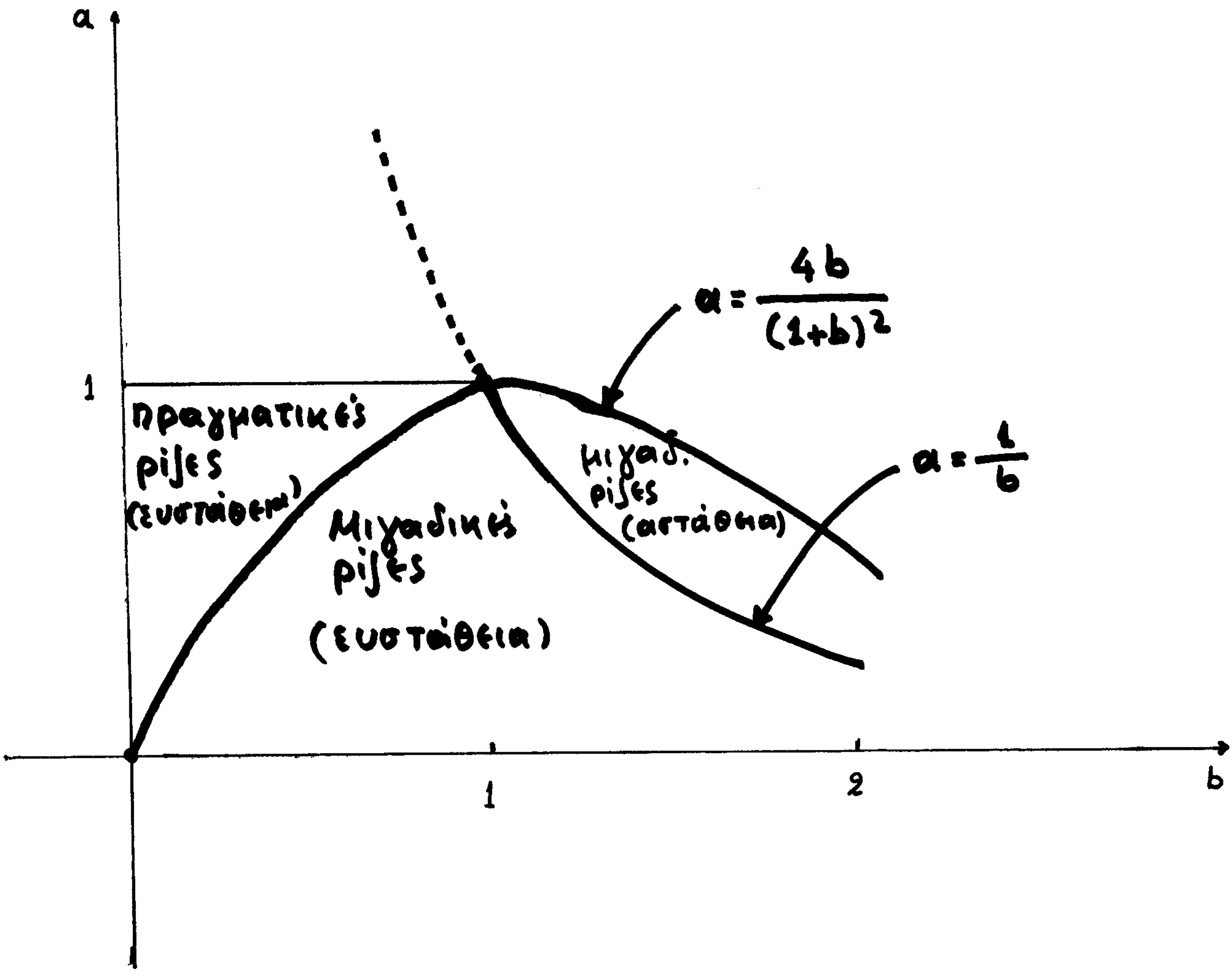
Αντικαθιστώντας το α από την (6)

$$\Rightarrow \quad \frac{4b(1+b)}{(1+b)^2 \cdot 2} < 1 \Longleftrightarrow 2b < 1+b \Longleftrightarrow$$

$$b < 1$$

Δηλ. τα σημεία της καμπύλης $\alpha = \frac{4b}{(1+b)^2}$ με $b<1$

αντιστοιχούν σε λύσεις της εξίσωσης που είναι ευσταθ


a
b
1
1
2
$a = \frac{4b}{(1+b)^2}$
$a = \frac{1}{b}$
πραγματικές ρίζες (ευστάθεια)
Μιγαδικές ρίζες (ευστάθεια)
μιγαδ. ρίζες (αστάθεια)

ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

N_k = πληθυσμός ενός είδους την k-χρονική περίοδο.

α = ρυθμός γεννήσεων κατά κεφαλή.

β = ρυθμός θανάτων κατά κεφαλή.

αριθμός γεννήσεων την k-χρονική περίοδο : αN_k.

αριθμός θανάτων την k-χρονική περίοδο : βN_k.

$$\Rightarrow \quad N_{k+1} = N_k + \alpha N_k - \beta N_k = (1+\alpha-\beta) N_k = (1+r) \cdot N_k$$

$$r := \alpha - \beta$$

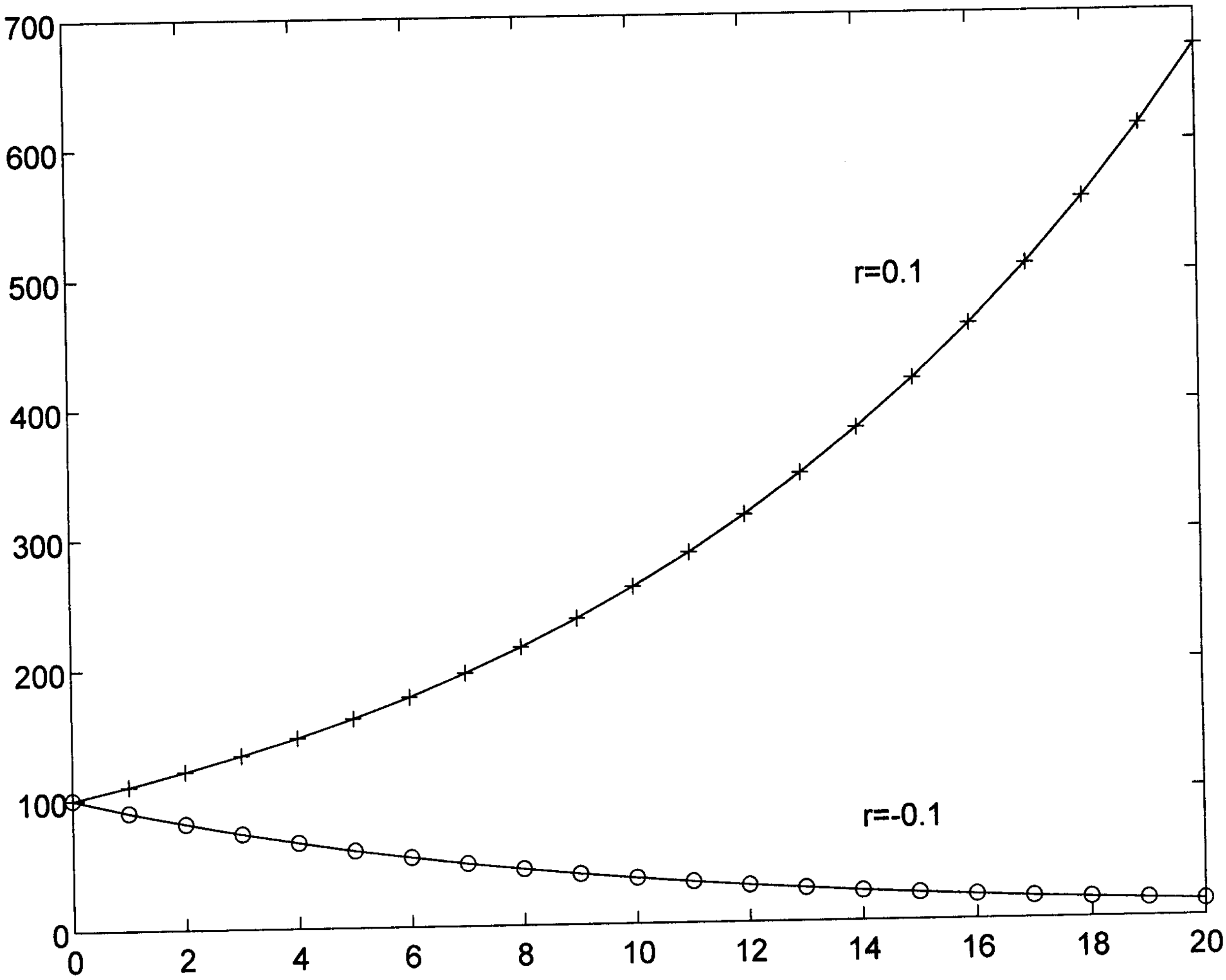
Λύση: $\quad N_k = (1+r)^k \cdot N_0 \quad , k=0,1,2,\ldots$

Αν $r>0$, ο πληθυσμός αυξάνει απεριόριστα.

Αν $r<0$, ο πληθυσμός μειώνεται συνεχώς.

Το αποτέλεσμα δεν είναι συμβατό με την πραγματικότητα , γι' αυτό εισάγεται ένα πιο ρεαλιστικό μη γραμμικό πληθυσμιακό μοντέλο.

$r = \alpha - \beta$ ονομάζεται ρυθμός αύξησης <u>χωρίς</u> περιοριστικές συνθήκες.


700
600
500
400
300
200
100
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
r=0.1
r=-0.1

Νόμος Malthus: $N_{k+1} = N_k + r N_k$ (1)

Για αποφυγή φαινομένων υπερπληθυσμού θέτουμε:

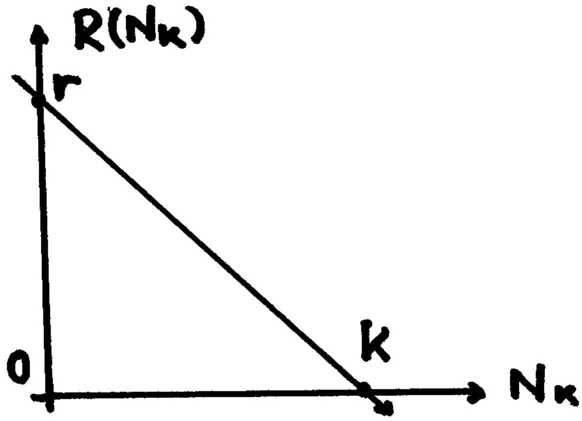
$$N_{k+1} = N_k + R(N_k) \cdot N_k$$

όπου ο ρυθμός αύξησης $R(N_k)$ είναι συνάρτηση του N_k.

Απαιτήσεις για τον προσδιορισμό του $R(N_k)$.

- K = πληθυσμιακή χωρητικότητα για ένα συγκεκριμένο είδος.
- Ο ρυθμός αύξησης $R(N_k)$ μειώνεται όταν ο πληθυσμός N_k αυξάνεται (δηλ. $R(N_k)$ είναι φθίνουσα ως προς N_k).
- Όταν $N_k = K \rightsquigarrow R(K) = 0$.
- Όταν $N_k \to 0 \rightsquigarrow R(N_k) = r$ (ρυθμός αύξησης χωρίς περιορισμούς).

Από τις συναρτήσεις $R(N_k)$ που ικανοποιούν τις παραπάνω απαιτήσεις επιλέγουμε την απλούστερη, δηλ. την ευθεία από το $(0, r)$ στο $(K, 0)$.



$$\Rightarrow \quad R(N_k) = -\frac{r}{K} N_k + r \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow$

$$N_{k+1} = N_k + rN_k\left(1 - \frac{N_k}{K}\right) \qquad (3)$$

(Διακριτή Λογιστική Εξίσωση)

Η (3) είναι μη γραμμική και δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση της λύσης. Η λύση προκύπτει αριθμητικά για δοσμένες τιμές των r, K και N_0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΟΓ. ΕΞΙΣ. (3)

Σημεία Ισορροπίας (Σταθερές λύσεις): Θέτουμε $N_k = N_{k+1} = s$

$$\Rightarrow \quad s = s + rs\left(1 - \frac{s}{K}\right) \Leftrightarrow s = 0 \;, \quad \underline{s = K}$$

$$(3) \Leftrightarrow N_{k+1} - N_k = rN_k\left(1 - \frac{N_k}{K}\right) \quad , \quad (4)$$

Αν $N_k < K \rightsquigarrow \frac{N_k}{K} < 1 \rightsquigarrow 1 - \frac{N_k}{K} > 0 \rightsquigarrow N_{k+1} > N_k$

Αν $N_k > K \rightsquigarrow \frac{N_k}{K} > 1 \rightsquigarrow 1 - \frac{N_k}{K} < 0 \rightsquigarrow N_{k+1} < N_k$.

Επειδή για $r > 3$ το N_k παίρνει και αρνητικές τιμές θεωρούμε:

$$0 < r \leq 3 \; .$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

· Εστω μια γενικής μορφής πρώτης τάξης μη γραμμική εξίσωση διαφορών:

$$X_{k+1} = g(X_k) \quad , \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

όπου g είναι επαρκώς ομαλή συνάρτηση.

Αν $X_k = s$ σημ. ισορροπίας τότε:

$$s = g(s)$$

$$\text{Θέτουμε:} \quad X_k = s + Y_k \qquad (6)$$

όταν Y_k είναι κοντά στο 0 το X_k είναι κοντά στο s.

Από (5) $\Rightarrow$ $Y_{k+1} + s = g(s+Y_k) \simeq g(s) + g'(s)Y_k$

$\Rightarrow$ $Y_{k+1} = g'(s)Y_k$ (λόγω της $s=g(s)$).

$$\Leftrightarrow$$

$$Y_k = (g'(s))^k \cdot Y_0$$

Από (6) $\Rightarrow$ $X_k = s + (g'(s))^k \cdot (X_0 - s)$ (7)

Από την (7) προκύπτει ότι το σημ. ισορροπίας s είναι ευσταθές $\Leftrightarrow$ $|g'(s)| < 1$.

Για την $N_{k+1}=N_k+rN_k\left(1-\frac{N_k}{K}\right)=g(N_k)$

είναι $g(x)=x+rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$

Από $s=g(s) \Leftrightarrow s=0$ και $\underline{s=K}$.

$$g'(x)= r+1-\frac{2r}{K}x \rightarrow g'(K)=r+1-\frac{2rK}{K}=1-r$$

Το $s=K$ είναι ευσταθές σημ. ισορροπίας $\Leftrightarrow$

$$|g'(K)|<1 \Leftrightarrow |1-r|<1 \Leftrightarrow 0<r<2$$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ $(2<r<2.57)$

Αν $2<r<2,45..$ εμφανίζεται ένας νέος τύπος συμπεριφοράς. Ο πληθυσμός N_k τείνει προς μια ταλάντωση χωρίς απόσβεση, η οποία εξελίσσεται περιοδικά πάνω και κάτω από την πληθυσμιακή χωρητικότητα K, προσεγγίζοντας δύο σημεία που αποτελούν το λεγόμενο 2-κύκλο.

Τα σημεία του 2-κύκλου είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$x=g(g(x)):=g^2(x) \quad . \qquad (8)$$

Από τις λύσεις της (8) εξαιρούμε τα σημ. ισορροπίας.

Αν $2,45..<r<2,544..$ ο πληθυσμός N_k τείνει προς μια ταλάντωση χωρίς απόσβεση που εξελίσσεται περιοδικά προσεγγίζοντας 4 σημεία ενός 4-κύκλου, τα οποία είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x = g^4(x)$$

.

Για $2{,}544... < r < 2{,}564...$ εμφανίζεται ένας 8-κύκλος

κ.ο.κ.

Η ακολουθία τιμών

$r_1 = 2$, $r_2 = 2{,}45...$, $r_3 = 2{,}544...$, $r_4 = 2{,}564...$

αποδεικνύεται ότι συγκλίνει σε μία οριακή τιμή $r_\infty = \lim_{n\to+\infty} r_n = 2{,}569946...$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+2}-r_{n+1}} := \delta = 4{,}6692016...$$

(σταθερά του Feigenbaum).

Τί γίνεται για $r > r_{\infty} = 2,57...$;

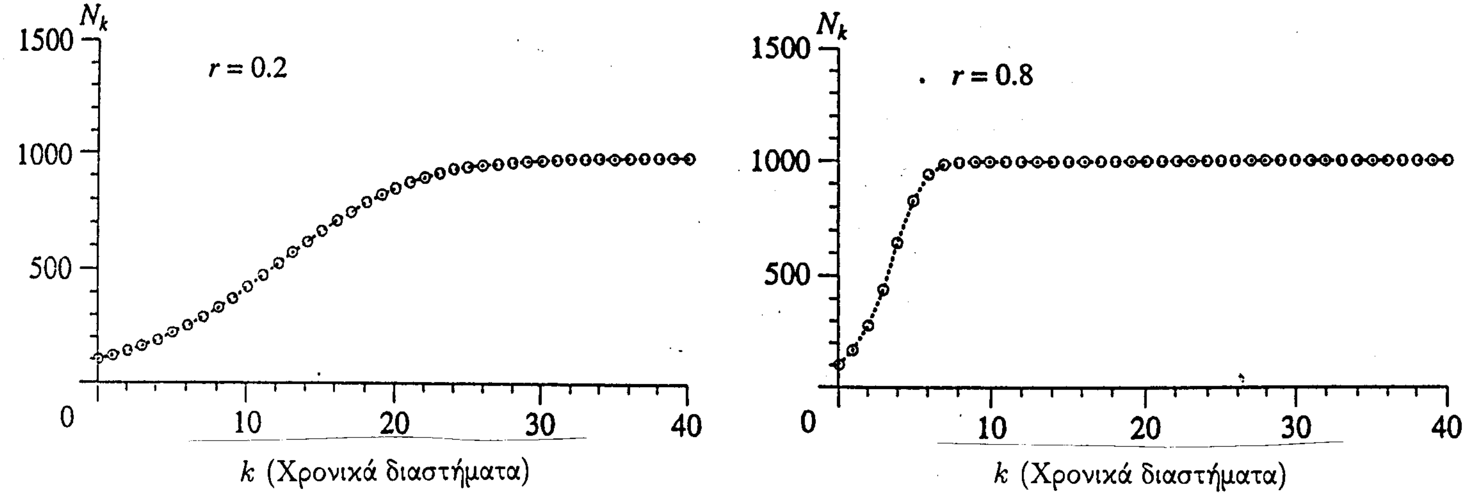
Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε αρχική τιμή N_0 οι τιμές του N_k δεν παρουσιάζουν καμμία περιοδικότητα. Οι αριθμοί που παράγονται φαίνονται εντελώς τυχαίοι. Όσα N_k και να υπολογίσουμε το επόμενο N_{k+1} είναι τελείως απρόβλεπτο.

Βλέπουμε ότι εισχώρησε η τυχαιότητα σε μια τόσο σαφώς ντετερμινιστική διαδικασία όπως η εξίσωση (3). Δηλ. χάθηκε η δυνατότητα να προβλέπουμε με ακρίβεια την εξέλιξη της δυναμικής του συστήματός μας. Μπορεί να παρατηρήσουμε ότι ένα ελάχιστο σφάλμα στην αρχική μας συνθήκη, στο πέμπτο, δέκατο ή εκατοστό ψηφίο που κανείς υπολογιστής δεν μπορεί να αποφύγει θα αυξηθεί εκθετικά.

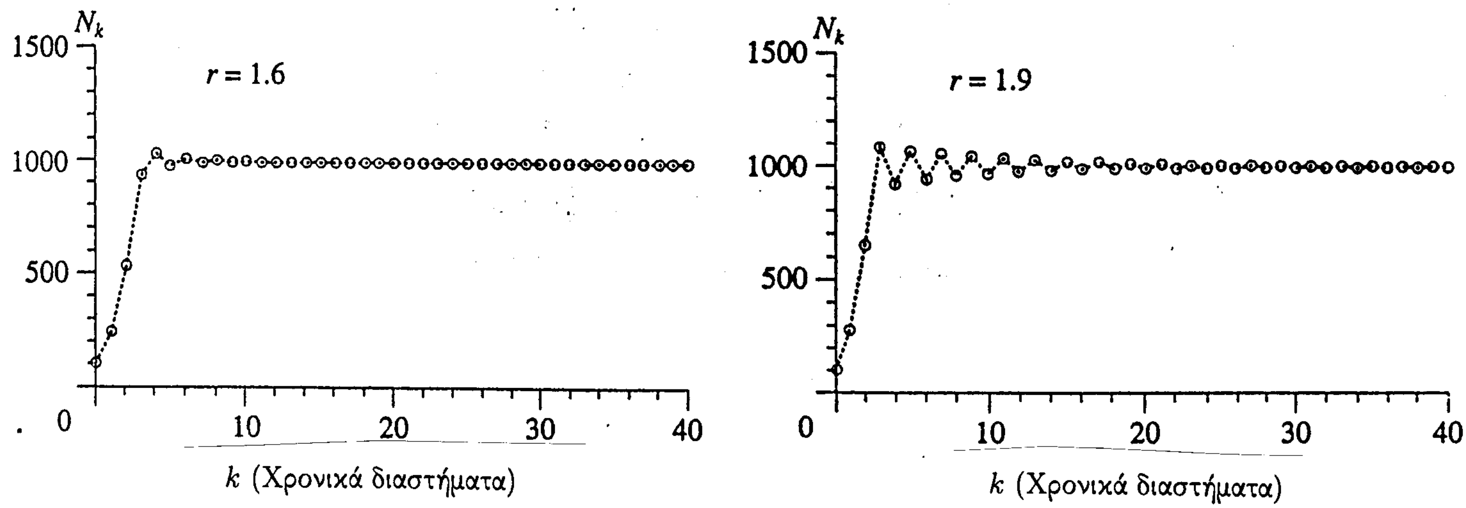
Αφού καμμιά αρχική συνθήκη δεν είναι γνωστή με <u>άπειρη ακρίβεια</u> και κανείς υπολογιστής στον κόσμο δεν μπορεί να χειρισθεί άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι μοιραίο τα σφάλματα να αυξάνονται εκθετικά οδηγώντας τελικά στην πλήρη απώλεια της αρχικής πληροφορίας και επομένως σε μία εξέλιξη του φαινομένου που τώρα μπορούμε να ονομάσουμε χαοτική.

Αυτό είναι το ΧΑΟΣ.

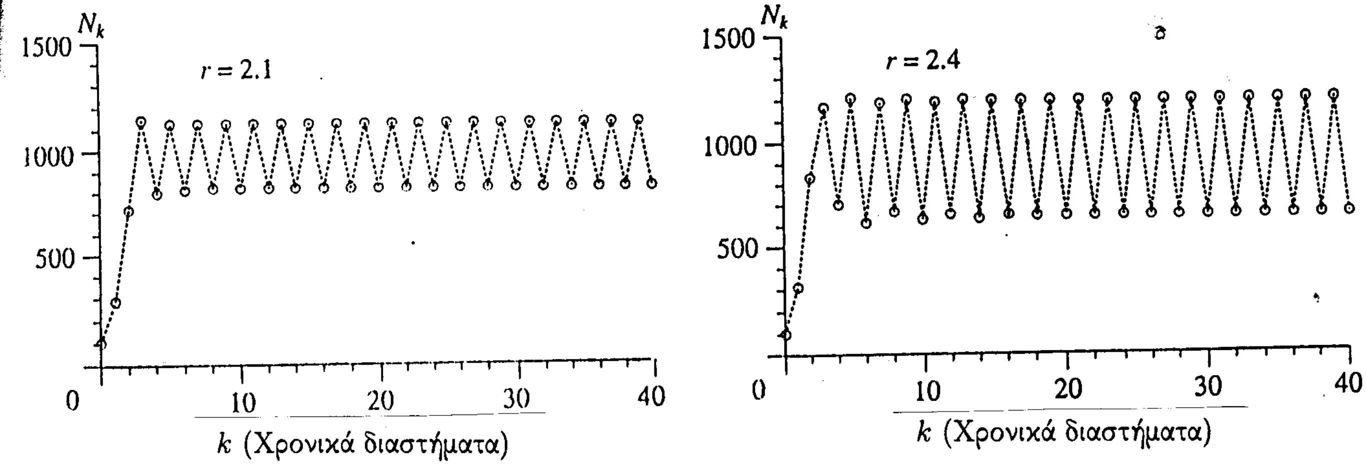
Φαινόμενο γενικής αστάθειας ενός Ντετερμινιστικού Δυναμικού συστήματος.



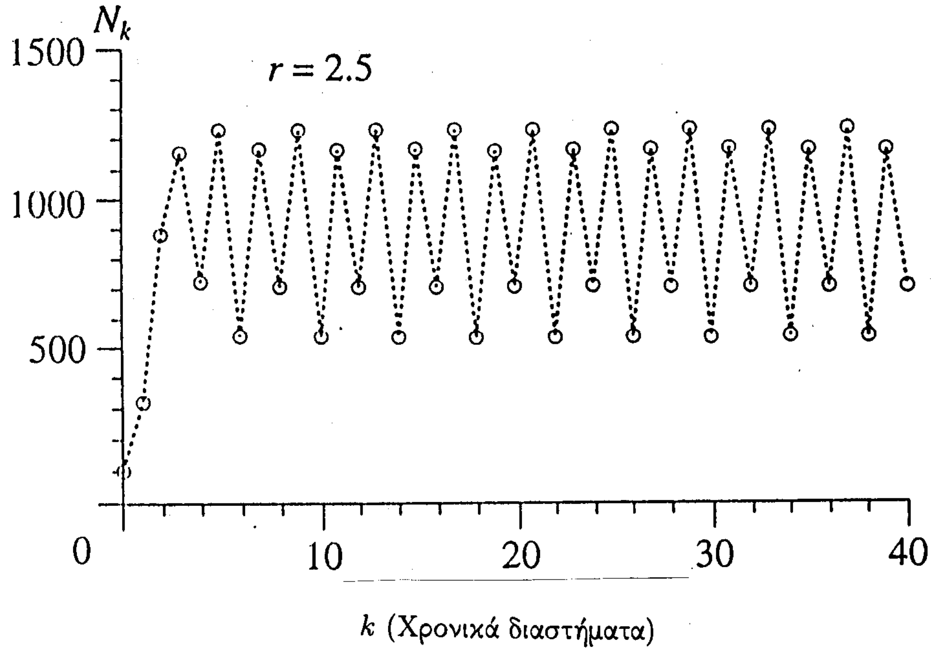
Διακριτή λογιστική εξίσωση για $r = 0.2$ και $r = 0.8$. Ο πληθυσμός αυξάνει και στη συνέχεια σταθεροποιείται σε ένα σημείο ισορροπίας.



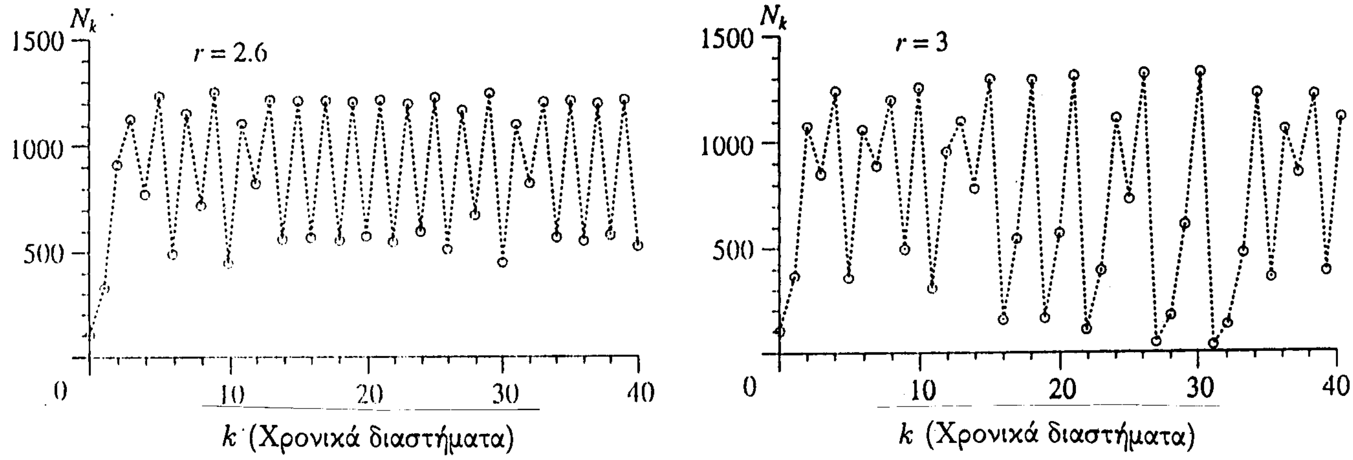
Διακριτή λογιστική εξίσωση για $r = 1.6$ και $r = 1.9$.



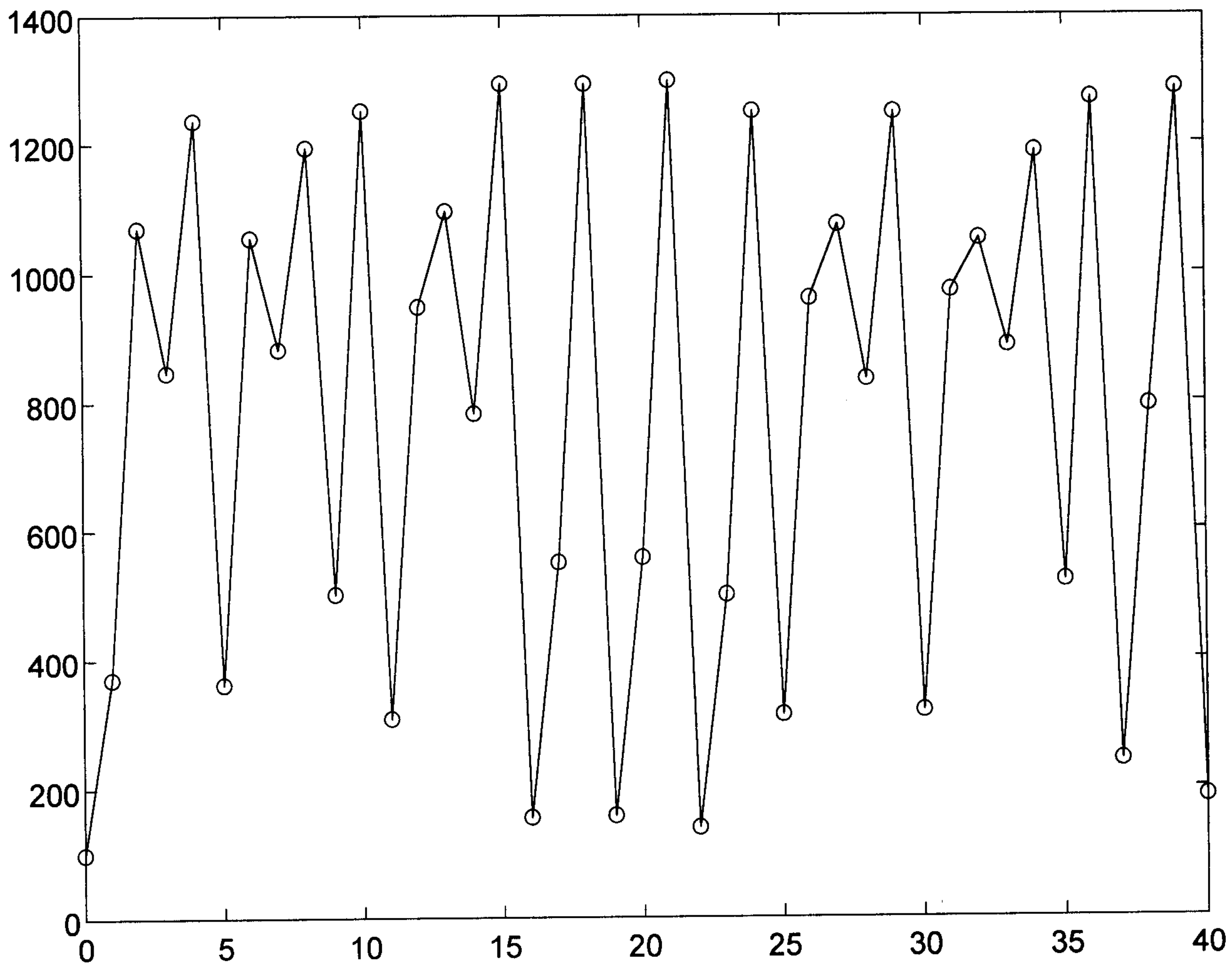
Διακριτή λογιστική εξίσωση για $r = 2.1$ και $r = 2.4$. Σε κάθε περίπτωση αντιστοιχεί ένας 2–κύκλος.



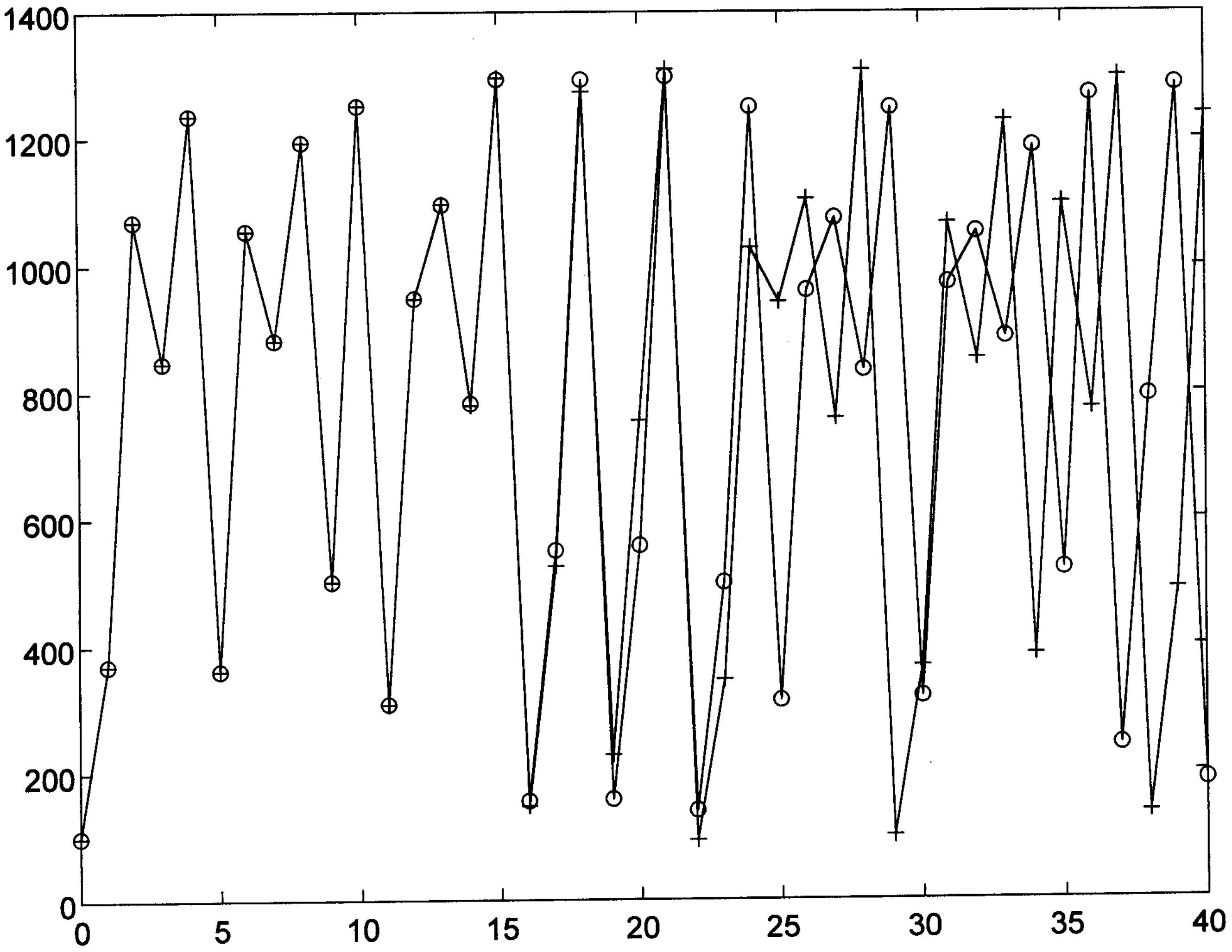
Διακριτή λογιστική εξίσωση για $r = 2.5$: ένας 4–κύκλος.



Χαοτική συμπεριφορά για $r = 2.6$ και $r = 3$.



Μία λύση της διακριτής λογιστικής εξίσωσης για $r = 3$, $K = 1000$ και $N_0 = 100$. Η λύση είναι χαοτική.



Δύο λύσεις της διακριτής λογιστικής εξίσωσης για $r = 3$, $K = 1000$, $N_0 = 100$ και $N_0 = 100.0001$.