ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ, ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ, ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Είναι της μορφής:

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_2 y_k = 0 \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Αν $y = y(t)$ μία συνεχής πραγματική συνάρτηση και T = σταθερά (περίοδος δειγματοληψίας).

Παίρνοντας τις τιμές της συνάρτησης $y(t)$ στις χρονικές στιγμές $0, T, 2T, \ldots, kT, \ldots$

θέτουμε:

$$\begin{array}{ccccccc} y(0), & y(T), & y(2T), & \ldots, & y(kT), & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ y_0 & y_1 & y_2 & & y_k & \end{array}$$

Έχουμε την ακολουθία διακριτών τιμών της $y(t)$

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ (1)

Χαρ/κή εξίσωση της (1) είναι η $r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$ (2) (εξίσωση δευτέρου βαθμού).

Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της (2), τότε η γενική λύση είναι:

$$y_k = C_1 \rho_1^k + C_2 \rho_2^k \quad , \quad \text{όπου } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΡΓΟΔΟΣΙΑΣ

Αφορά τη διαμόρφωση των μισθών μεταξύ εργαζομένων και εργοδοτών.

L_0 ο διεκδικούμενος ανά έτος μισθός από τους εργαζόμενους
M_0 ο προσφερόμενος μισθός ανά έτος από την εργοδοσία.

$$L_0 > M_0 .$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο πλευρών επιλύεται μέσω διαπραγματεύσεων όπου σε κάθε γύρο οι εργαζόμενοι υποβάλλουν ένα διεκδικούμενο μισθό και η εργοδοσία κάνει μία αντιπροσφορά.

Ένα μαθηματικό μοντέλο αυτής της διαδικασίας μπορεί να οικοδομηθεί με την υπόθεση ότι σε κάθε γύρο διαπραγματεύσεων η εργοδοσία αναανεώνει τη προσφορά της προσθέτοντας ένα ποσοστό α της διαφοράς μεταξύ της τελευταίας απαίτησης των εργαζομένων και της τελευταίας αντιπροσφοράς των εργοδοτών.

Οι εργαζόμενοι σε κάθε νέο γύρο, αναανεώνουν την απαίτηση τους αφαιρώντας ένα ποσοστό β της διαφοράς μεταξύ της τελευταίας απαίτησής τους και της τελευταίας προσφοράς της εργοδοσίας.

· Έστω M_k, L_k αντίστοιχα η προσφορά της εργασίας και η απαίτηση των εργαζομένων στον k-γύρο συνομιλιών.

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + \alpha\,(L_k - M_k) \\ L_{k+1} &= L_k - \beta\,(L_k - M_k) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

α, β σταθερές με $0<\alpha<1$ και $0<\beta<1$.

Οι εξισώσεις (1) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} M_{k+1} &= (1-\alpha)M_k + \alpha L_k \\ L_{k+1} &= \beta M_k + (1-\beta)L_k \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Θέτοντας $k \longrightarrow k+1$ στην πρώτη εκ των (2) έχουμε:

$$M_{k+2} = (1-\alpha)M_{k+1} + \alpha L_{k+1} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας το L_{k+1} από τη δεύτερη εκ των (2) στην (3) προκύπτει:

$$M_{k+2} = (1-\alpha)M_{k+1} + \alpha\beta M_k + \alpha(1-\beta)L_k \qquad (4)$$

αντικαθιστώντας στην (4) το L_k από την πρώτη εξίσωση εκ των (2) έχουμε:

$$M_{k+2} - (2-\alpha-\beta)M_{k+1} + (1-\alpha-\beta)M_k = 0 \qquad (5)$$

που είναι ως προς M_k γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης.

Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι:

$$r^2 - (2-\alpha-\beta)r + (1-\alpha-\beta) = 0 \qquad (6)$$

Η χαρακτ. εξίσωση (6) έχει ρίζες:

$$r_1 = 1 \quad \text{και} \quad r_2 = 1-\alpha-\beta$$

Συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι

(7): $M_k = c_1 + c_2 (1-\alpha-\beta)^k$, c_1, c_2 σταθερές.

Αντικαθιστώντας τα M_k, M_{k+1} στην εξίσωση:

$$M_{k+1} = (1-\alpha) M_k + \alpha L_k$$

παίρνουμε:

(8): $$L_k = c_1 - c_2 \frac{\beta}{\alpha} (1-\alpha-\beta)^k .$$

Τα c_1, c_2 υπολογίζονται από τη γνώση των L_0, M_0.

Από τις (7) και (8) για $k=0$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= c_1 + c_2 \\ L_0 &= c_1 - c_2 \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha+\beta} \\ c_2 &= \frac{-\alpha(L_0 - M_0)}{\alpha+\beta} \end{aligned}\right.$$

Επειδή $0<\alpha,\beta<1$ και $L_0 > M_0 \Rightarrow c_1 > 0$, $c_2 < 0$.

Αντικαθιστώντας τα c_1, c_2 στις εκφράσεις των M_k, L_k προκύπτει:

$$M_k = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha(L_0 - M_0)}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^k \qquad (9)$$

$$L_k = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha+\beta} + \frac{\beta(L_0 - M_0)}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^k \qquad (10)$$

Αν $0<\alpha+\beta<1$, πιο εύκολα φαίνεται να ισχύει: $\Rightarrow$ $0<1-\alpha-\beta<1$

ΤΟΤΕ:

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = \lim_{k\to+\infty} L_k = \frac{\alpha L_0+\beta M_0}{\alpha+\beta} =: W$$

όπου $M_0 < W < L_0$ . .