ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ. Ο RAMANUJAN ΚΑΙ ΚΑΠΟΙΕΣ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ Α. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
ΟΜΟΤΙΜΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

Ένας αριθμός $a \in \mathbb{C}$ λέγεται αλγεβρικός αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$ με $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$, $c_n \neq 0$ $n > 0$.

Εδώ $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{Q}$ το σώμα των ρητών αριθμών

Προφανώς $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Αν $\mathbb{A}$ το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών, τότε το $\mathbb{A}$ είναι επίσης σώμα και $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{C}$. Οι πραγματικοί αλγεβρικοί αριθμοί, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R} \cap \mathbb{A}$ αποτελούν επίσης ένα σώμα.

Αν a είναι αλγεβρικός, τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$ που μηδενίζεται από το a, δηλαδή $f(a) = c_n a^n + \cdots + c_0 = 0$. Αφού $c_n \neq 0$, μπορούμε να υποθέσουμε $c_n = 1$. Μεταξύ αυτών των πολυωνύμων υπάρχει τουλάχιστον ένα που έχει τον μικρότερο δυνατό βαθμό, έστω το $p(x)$. Το $p(x)$ έχει τις ιδιότητες:

(i) Είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$, δηλαδή αν $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, όπου τα $p_1(x), p_2(x)$ είναι πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές, τότε ένα από τα $p_1(x), p_2(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο, διότι διαφορετικά $p_1(a) = 0$ ή $p_2(a) = 0$ και το $p(x)$ δεν θα είχε το μικρότερο δυνατό βαθμό.

Αντίστροφα, αν το $p(x)$ είναι ανάγωγο με $p(a) = 0$, τότε το $p(x)$ είναι μικρότερου δυνατού βαθμού.

(ii) Το $p(x)$ είναι μοναδικό ως προς το να έχει το μικρότερο δυνατό βαθμό, διότι αν $q(x)$ είναι ένα άλλο πολυώνυμο με τις ίδιες ιδιότητες, τότε $q(x) =$

$p(x)\sigma(x) + r(x)$ με $\deg r(x) < \deg p(x)$ ή $r(x) = 0$, τότε πρέπει $r(x) = 0$ από τον ορισμό του $p(x)$ και επομένως $p(x) = q(x)$ αφού έχουν τον ίδιο βαθμό.

Το $p(x)$ λέγεται το ελάχιστο πολυώνυμο του a και συμβολίζεται με $m_a(x)$ (minimal), ο δε βαθμός του $m_a(x)$ λέγεται και βαθμός του στοιχείου a και συμβολίζεται με $d(a) = \deg m_a(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (i) $\sqrt{2}$, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το x^2-2. Άρα $d(\sqrt{2}) = 2$.

(ii) $\sqrt[3]{2}$, $m_{\sqrt[3]{2}}(x) = x^3 - 2$, $d\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3$.

(iii) i (φανταστ. μονάδα) $m_i(x) = x^2 + 1$, $d(i) = 2$.

(iv) $a = \sqrt{3} + 1$. Το a είναι ρίζα του αναγώγου πολυωνύμου $(x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$. Άρα $d(a) = 2$.

(v) $a = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $m_a(x) = x^3 - \dfrac{3}{8}$, $d(a) = 3$.

(vi) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Το a είναι ρίζα του αναγώγου πολυωνύμου

$$p(x) = (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = x^4 - 10x + 1$$

και επομένως $d(a) = 4$.

Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα, δύο διαφορετικά αλγεβρικά στοιχεία μπορεί να έχουν τον ίδιο βαθμό, ενώ εάν δύο στοιχεία έχουν διαφορετικό βαθμό, τότε είναι κατανάγκην διαφορετικά. Έτσι, αν εμπλέκονται ριζικά δεν είναι εύκολο να αποφανθούμε ότι δύο στοιχεία είναι ίσα ή όχι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(i) Το $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ είναι ρίζα του αναγώγου πολυωνύμου $x^4 - 10x^2 + 1$, όπως και το $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Τα δύο αυτά στοιχεία είναι ίσα, διότι $5 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$. Εξ άλλου το $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου. Όλες οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού είναι $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$.

(ii) Τα στοιχεία $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt[3]{\kappa} + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Q}$ είναι πάντοτε διαφορετικά για οποιαδήποτε κ, λ διότι $d(a) = 4$ ενώ το β είναι ρίζα του πολυωνύμου $(x-\lambda)^3 - \kappa$ και επομένως $d(\beta) \leq 3$.

(iii) Ο ιδιοφυής Ινδός Μαθηματικός Srinivasa RAMANUJAN ανακάλυψε τις παρακάτω ισότητες (βλέπε και [3] στη βιβλιογραφία)

1. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{1/9} - \sqrt[3]{2/9} + \sqrt[3]{4/9}$

2. $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}\right)$

3. $\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{98} - \sqrt[3]{28} - 1\right)$

4. $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{5}} + \sqrt[5]{\frac{4}{5}}\right)^{1/2} = \left(1 + \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{8}\right)^{1/5}$
$$= \sqrt[5]{\frac{16}{125}} + \sqrt[5]{\frac{8}{125}} + \sqrt[5]{\frac{2}{125}} - \sqrt[5]{\frac{1}{125}}$$

5. $\left(\sqrt[5]{\frac{32}{5}} - \sqrt[5]{\frac{27}{3}}\right)^{1/3} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}}$

6. $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{1/4} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$

7. $\left(7\sqrt[3]{20}-19\right)^{1/6} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

8. $\left(4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^{1/8} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

Αργότερα δόθηκαν γενικεύσεις των παραπάνω (από νεώτερους Μαθηματικούς) όπως

(a) $\left(\frac{(a+4)\sqrt[3]{a}+(1-2a)\sqrt[3]{4}}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4a}-\sqrt[3]{a^2}}{3}$
Για $a = 5$ έχουμε την 2. παραπάνω

(b) $\left(\frac{(a+2)\sqrt[3]{4a}+(1-4a)}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt[3]{2a^2}-\sqrt[3]{3a}-1}{3}$
Για $a = 7$ έχουμε την 3. παραπάνω

(c) $\left((a^2-7a+1)+(6a-3)\sqrt[3]{a}+\left(6-3a\sqrt[3]{a^2}\right)\right)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}-1$
Για $a = 2$ έχουμε την 1. παραπάνω.

Ο Ramanujan έδωσε επίσης τον εξής τύπο:

$$\sqrt{m\sqrt[3]{4m-8n}+n\sqrt[3]{4m+n}}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{(4m+n)^2} + \sqrt[3]{4(m-2n)(4m+n)} - \sqrt[3]{2(m-2n)^2}\right\}$$

Ευκαιρία να πούμε κάτι για τη ζωή του Ramanujan:

Ο Srinivasa Ramanujan γεννήθηκε στις 22 Δεκεμβρίου 1887 σε μία κωμόπολη κοντά στο Madras των Ινδιών. Το 1892 γράφτηκε στο Δημοτικό σχολείο της

Kumbakonam και στη συνέχεια παρακολούθησε διάφορα δημοτικά σχολεία. Το 1898 πέρασε με ΑΡΙΣΤΑ τις εξετάσεις και γράφτηκε στο Γυμνάσιο. Στις τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου δανείστηκε ένα βιβλίο Μαθηματικών με τίτλο "Σύνοψις στοιχειωδών αποτελεσμάτων καθαρών Μαθηματικών" με συγγραφέα τον G. S. Carr, που επηρέασε αποφασιστικά την Μαθηματική του πορεία.

Το 1904 εισήλθε στο Κρατικό Κολλέγιο της Kumbakonam με υποτροφία. Μέχρι τότε πήγαινε πολύ καλά στα σχολικά Μαθήματα αλλά βαθμιαία άρχισε να παραμελεί όλα τα αντικείμενα εκτός από τα Μαθηματικά. Το 1906 γράφτηκε στο Pachaiyappa College στο Madras και παρακολούθησε μαθήματα για 3 μήνες σε μία προσπάθεια να περάσει τις εισαγωγικές εξετάσεις για το Πανεπιστήμιο του Madras. Εν τούτοις απέτυχε σε όλα τα αντικείμενα εκτός από τα Μαθηματικά.

Το 1909 η μητέρα του κανόνισε να παντρευτεί την S. Janaki Anmal μία 9χρονη θυγατέρα ενός μακρινού συγγενή, η οποία όμως έζησε χωριστά μέχρι το 1912.

Από τότε άρχισε να γίνεται γνωστός για τις Μαθηματικές του ικανότητες κυρίως λόγω των Μαθηματικών Προβλημάτων που έθετε και έλυνε στο περιοδικό Journal of the Indian Mathematical Society. Τα οικονομικά του δεν ήταν όμως καλά και η οικογένεια ήταν πτωχή. Με τη βοήθεια ανθρώπων που αναγνώριζαν τις Μαθηματικές του ικανότητες εύρισκε προσωρινές απασχολήσεις, η κυριώτερη των οποίων ήταν, ως υπάλληλος στο Λογιστήριο του Madras Port Trust με 30 ρουπίες το μήνα.

Ο Ramanujan ήταν ήδη γνωστός σε καθηγητές Μαθηματικών διαφόρων Κολλεγίων και Πανεπιστημίων οι οποίοι προσπάθησαν να τον βοηθήσουν να διευρύνει τις σπουδές του σε κατάλληλο περιβάλλον. Είχαν έλθει σε επαφή με διάφορους διακεκριμένους Βρεττανούς Μαθηματικούς των οποίων η ανταπόκριση ήταν μάλλον αδιάφορη, αλλά η ανταπόκριση από τον G. H. Hardy που ήταν ήδη πολύ γνωστός και Fellow of Trinity College στο Cambridge ήταν πολύ ευνοϊκή και ενθαρρυντική. Ο Hardy αντάλλαξε πολλές επιστολές με τον Ramanujan. Με την σύστασή του το Πανεπιστήμιο του Madras χορήγησε στον Ramanujan μία υποτροφία 75 ρουπίες το μήνα για δύο χρόνια και ο Hardy κανόνισε να πάει ο Ramanujan στο Cambridge και να πάρει και κατάλληλη οικονομική υποστήριξη.

Υπήρξαν δυσκολίες, γι' αυτήν τη μετακίνηση μια που η μετάβαση ενός ορθοδόξου Βραχμάνου στο εξωτερικό δεν επιτρεπόταν. Τελικά η μητέρα του συμφώνησε και στις 17 Μαρτίου 1914 ο Ramanujan απέπλευσε για την Αγγλία με £ 250 το χρόνο από το Πανεπιστήμιο του Madras και £ 60 από το Trinity College που ήταν αρκετά για να υποστηρίξουν όχι μόνον αυτόν στο Cambridge αλλά επίσης την οικογένειά του, που άφησε στην Ινδία.

Υπήρχαν προβλήματα με τη ζωή του στο Cambridge κυρίως επειδή ήταν αυστηρά χορτοφάγος και υπήρχε δυσκολία να προμηθευτεί κάποια τρόφιμα και λόγω του πολέμου (Α' Παγκ. Πόλεμος). Εν τούτοις ο Ramanujan και ο Hardy συναντώντο κάθε μέρα και η συνεργασία τους ήταν πολύ καρποφόρα και για τους δύο.

Δυστυχώς το 1917 αρρώστησε και κατά τη διάρκεια της υπόλοιπης διαμονής του στην Αγγλία την πέρασε σε διάφορα σανατόρια. Είχε βελτιώσεις στην υγεία του πιθανώς λόγω της εκλογής του το 1918 ως Fellow of the Royal Society (Ακαδημαϊκός) και επίσης Fellow of Trinity College, μεγάλες τιμές για ένα Μαθηματικό.

Στις 13 Μαρτίου 1919 ο Ramanujan επέστρεψε στην Ινδία πολύ άρρωστος και νοσηλεύτηκε σε διάφορα ιδρύματα με την καλύτερη ιατρική μεταχείριση για την Ινδία. Η υγεία του όμως χειροτέρευε και τελικά απέθανε στις 26 Απριλίου 1920. Η ασθένειά του ήταν μάλλον φυματίωση και έλλειψη βιταμινών.

Ο Ramanujan έκανε θεμελιώδη συμβολή στα Μαθηματικά κυρίως σε άπειρες σειρές σε άπειρα γινόμενα σε συνεχή κλάσματα και άλλα κυρίως σε Θεωρία Αριθμών, πολλά δημοσιεύθηκαν σε διακεκριμένα περιοδικά και άλλα που δεν πρόλαβε να δημοσιεύσει δημοσιεύθηκαν από τον Hardy και άλλους. Για περισσότερες λεπτομέρειες για τη ζωή και το έργο του Ramanujan βλέπε [1] και [2] στη βιβλιογραφία.

Οι πρώτες του δημοσιεύσεις ήταν όπως είπαμε στο Journal of the Indian Math. Society και ήταν σε στοιχειώδη Μαθηματικά όπως αναφέραμε παραπάνω. Δεν υπάρχουν αποδείξεις πως βρήκε τις παραπάνω ισότητες. Υπάρχουν ενδείξεις ότι σε μερικές χρησιμοποίησε τους τύπους που δίνουν τις ρίζες τριτοβαθμίων εξισώσεων. Οι τύποι του Cardano για τις ρίζες της εξίσωσης $x^3 + px + q = 0$ είναι

$$A + B, \quad \omega A + \omega^2 B, \quad \omega^2 A + \omega B \quad \text{όπου}$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Ας πάρουμε την εξίσωση $x^3 - x - 6 = 0$ που έχει την πραγματική ρίζα 2 και δύο μιγαδικές ρίζες. Από τους τύπους του Cardano για $p = -1$, $q = -6$ παίρνουμε

$$A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{36}{4}}} = \sqrt[3]{3 + \frac{11\sqrt{6}}{9}}$$

$$B = \sqrt[3]{3 - \frac{11\sqrt{6}}{3}}.$$

Άρα η πραγματική ρίζα είναι η $A+B$ και επομένως

$$\sqrt[3]{3+\frac{11\sqrt{6}}{9}}+\sqrt[3]{3-\frac{11\sqrt{6}}{9}}=2.$$

Ομοίως στην εξίσωση

$$x^3+\left(1-\sqrt[5]{2}\right)x-\sqrt[5]{2}=\left(x-\sqrt[5]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[5]{2x}+1\right)=0$$

όπου $p=1-\sqrt[5]{2}$, $q=-\sqrt[5]{2}$.

Εδώ

$$A=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{2}}{2}+\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt[5]{2}\right)^3}{27}+\frac{\left(\sqrt[5]{2}\right)^2}{4}}}$$

$$B=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{2}}{2}-\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt[5]{2}\right)^3}{27}+\frac{\left(\sqrt[5]{2}\right)^2}{4}}}.$$

Το $\sqrt[5]{2}$ ισούται με την πραγματική ρίζα όπου δίνεται από τους τύπους του Cardano που και εδώ είναι η $A+B$. Άρα $\sqrt[5]{2}=A+B$.

Ο Ramanujan ασχολήθηκε και με διοφαντικές εξισώσεις. Π.χ. έθεσε το πρόβλημα να ευρεθούν οι ρητές θετικές λύσεις της εξίσωσης

$$x^y=y^x$$

το οποίο έλυσε πλήρως. Έκτοτε εδόθησαν πολές λύσεις. Μία εξ αυτών γίνεται ως εξής: Βλέπε [4] στη βιβλιογραφία.

Αν εξαιρέσουμε τις τετριμμένες λύσεις $x=y$, μπορεί να υποθέσουμε ότι $x>y$ και να θέσουμε $x=ky$, όπου $k>1$. Προκύπτει $(ky)^y=y^{ky}$ ή $y^{k-1}=k$. Αν θέσουμε $k-1=\frac{1}{\sigma}$ τότε $k=1+\frac{1}{\sigma}$ $y=\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{\sigma}$ και $x=\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{\sigma+1}$. Αποδεικνύεται, όχι πολύ δύσκολα, ότι αν θέλουμε τα x, y να είναι ρητοί τότε ο σ είναι ένας θετικός ακέραιος, έστω n, οπότε οι πλήρεις λύσεις είναι

$$y=\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Για $n=1$ έχουμε τη μοναδική ακέραια λύση $y=2$, $x=4$ (ή συμμετρική $y=4$, $x=2$).

Για $n=2$ έχουμε τη ρητή λύση $y=\frac{9}{4}$, $x=\frac{27}{8}$. Επίσης ασχολήθηκε με την διοφαντική εξίσωση του Euler

$$x^3+y^3+z^3=t^3.$$

Απέδειξε την ταυτότητα:

$$(6a^2 - 4ab + 4b^2)^3 = (3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 + (4a^2 - 4ab + 6b^2)^3 + (5a^2 - 5ab - 3b^2)^3$$

και έτσι βρήκε μια διπαραμετρική οικογένεια λύσεων της εξίσωσης του Euler.

Αργότερα από άλλους βρέθηκαν γενικεύσεις των ανωτέρω λύσεων, όπως

$$\begin{aligned}(la^2 - nab + nb^2)^3 = &(pa^2 + mab - nb^2)^3 + (na^2 + nab - lb^2)^3 \\ &+ (ma^2 - mab - pb^2)^3,\end{aligned}$$

όπου $l = \lambda(\lambda^3 + 1)$, $m = 2\lambda^3 - 1$, $n = \lambda(\lambda^3 - 2)$ και $p = \lambda^3 + 1$.

Η προηγούμενη λύση προκύπτει αν θέσουμε $\lambda = 2$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] BRUCE C. BERNOT and ROVERT A. RANKIN: Ramanujan, Letters and commentary American Mathematical Society, London Mathematical Society, History of Mathematics vol. 9.

[2] BRUCE G. BERNDT and ROBERT A. RANKIN editors Ramanujan: Essays and Surveys American Math. Society, London Math. Society, History of Mathematics vol. 9.

[3] SUSAN LANDAU: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ Four Different views. Notices of the American Math. Society, volume 20, Number 4, 1998.

[4] MARTA SVED: On the rational solutions of $x^y = y^x$. Mathematics Magazine, vol. 63 No 1, February 1990.